12. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 23. Januar 2017 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Drell-Yan Prozess $p\bar{p} \to \mu^+\mu^- + X$ und "neue Physik" **(10 Punkte)**

Analog zu Drell-Yan Prozessen der pp-Streuung existieren Drell-Yan $p\bar{p}$-Prozesse. Argumentieren Sie zunächst was sich bei der Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnittes der Streuung von $p\bar{p}$-Paaren im Vergleich zur pp-Streuung ändert. Formulieren Sie den *hadronischen* Wirkungsquerschnitt für $p\bar{p} \to \mu^+\mu^- + X$.
Nehmen Sie im Folgenden nun an, dass zusätzlich zu dem Photon γ ein hypothetisches "neues" massives Photon γ' existiere. Dieses habe die gleichen Kopplungen an Quarks und Leptonen wie das γ. Der Propagator des γ' sei von der Breit-Wigner Form, $-ig^{\mu\nu}/(q^2 - M^2 + iM\Gamma)$, für einen Impuls q, die Masse M und die Zerfallsbreite Γ.

a) Berechnen Sie den *partonischen* Wirkungsquerschnitt.

b) Berechnen Sie den differentiellen *hadronischen* Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}^2\sigma/(\mathrm{d}M_{ll}^2\,\mathrm{d}\eta)$, für die invariante Masse $M_{ll}^2 = q^2$ des Muon-Paares und die Rapidität η des Muon-Paares, d.h. $q^0 = M_{ll}\cosh\eta$.
Wie ändert sich (qualitativ) das M_{ll}^2-Spektrum des differentiellen Wirkungsquerschnittes für das "neue" Photon?

Aufgabe 2: Diskrete Symmetrien **(5 Punkte)**
Die Parität P, die Ladungskonjugation C und die Zeitumkehr T bilden jeweils mit der Identität $\mathbb{1}$ eine diskrete Gruppe mit nur zwei Elementen, denn es gilt $P^2 = C^2 = T^2 = \mathbb{1}$. Sie spielen in der Teilchenphysik eine wichtige Rolle, unter anderem, weil die Kombination der Operationen CPT eine Symmetrie der Quantenfeldtheorie ist. Die Wirkung von C, P und T auf Dirac-Felder ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P\psi(t,\vec{x})P &= \eta\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \\ C\psi(t,\vec{x})C &= -i\xi(\overline{\psi}(t,\vec{x})\gamma^0\gamma^2)^T \\ T\psi(t,\vec{x})T &= \zeta\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}) \end{aligned} \tag{1}$$

mit komplexen Phasen η, ξ und ζ, die zum Zweck dieser Aufgabe gleich eins gesetzt werden dürfen. Die Operatoren P und C sind linear und unitär, wohingegen der Operator T antiunitär und antilinear ist, das heißt, dass

$$\begin{aligned} \langle T\phi_1|T\phi_2\rangle &= \langle\phi_1|\phi_2\rangle^* \\ T(a\psi_1 + b\psi_2) &= a^*T\psi_1 + b^*T\psi_2 \end{aligned} \tag{2}$$

mit Zuständen $|\phi_{1,2}\rangle$, Operatoren $\psi_{1,2}$ und komplexen Zahlen a und b. [1]

a) Zeigen Sie für die ersten drei Spalten, dass die Dirac-Bilineare die in der Tabelle aufgelisteten Transformationseigenschaften unter den diskreten Symmetrien besitzen. Denken Sie auch an die Antilinearität von T.

---

[1] Eine Herleitung dieser Eigenschaften finden Sie z.B. in Peskin Schroeder, Kapitel 3.6 oder in der QFT Vorlesung. Die Antiunitarität und Antilinearität von T liegt zum Beispiel darin begründet, dass die Theorie andernfalls Zustände mit beliebig negativen Energieeigenwerte enthalten würde.

	$\overline{\psi}\psi$	$i\overline{\psi}\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
P	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
CPT	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$

(Die Raum-Zeit-Argumente der Dirac-Bilineare bleiben hierbei nicht notwendigerweise invariant.)

Die Notation $(-1)^\mu$ ist hierbei wie folgt zu verstehen:

$$(-1)^\mu \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = 1, 2, 3\,. \end{cases}$$

b) Wie wirken P und T auf Vierervektoren $x = (t, \vec{x})$?
Zeigen Sie damit, dass die freie Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{3}$$

unter P und T ihre Form behält.

c) Warum impliziert die letzte Zeile der Tabelle, dass alle denkbaren Dirac-Lagrangedichten, die lorentzinvariant sind, CPT-invariant sind?

Aufgabe 3: Fierz Identitäten **(5 Punkte)**

Fermi's Theorie der schwachen Wechselwirkung besteht aus (lorentzinvarianten) Kontraktionen von 4-Fermionfeldern $(\bar{\psi}_1(x)\Gamma^A\psi_2(x))(\bar{\psi}_3(x)\Gamma^B\psi_4(x)) \subset \mathcal{L}$. Hierbei sind ψ_i Fermionfelder und mögliche Diracstrukturen Γ^I sind in Gleichung (4) gegeben.
Induziert eine Umordnung der Fermionfelder weitere Terme, welche in der Lagrangedichte berücksichtigt werden müssen? Betrachten Sie dazu im Folgenden Fierz Identitäten. [2]

Gegeben sei die chirale Basis

$$\Gamma^A \in \{P_R, P_L, \gamma^\mu P_L, \gamma^\mu P_R, \sigma^{\mu\nu}\} \tag{4}$$

und ihre duale Basis

$$\Gamma_A \in \{P_R, P_L, \gamma_\mu P_R, \gamma_\mu P_L, \sigma_{\mu\nu}/2\} \tag{5}$$

mit $P_{R/L} = (1 \mp \gamma_5)/2$ und $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$. Beachten Sie die Ordnung in (4) und (5).
Die Fierz Identität ist damit

$$(\bar{\psi}_1\Gamma^A\psi_2)(\bar{\psi}_3\Gamma^B\psi_4) = -\frac{1}{4}\mathrm{Sp}[\Gamma^A\Gamma_D\Gamma^B\Gamma_C]\,(\bar{\psi}_1\Gamma^C\psi_4)(\bar{\psi}_3\Gamma^D\psi_2)\,. \tag{6}$$

a) Betrachten Sie zunächst die allgemeine Struktur. Warum ist $\mu < \nu$ hinreichend in (4) und (5)? Erklären Sie das Minus-Zeichen in (6). Zeigen die Normierung $\mathrm{Sp}[\Gamma^A\Gamma_B] = 2\delta^A_B$ für $\Gamma^A = P_R$.

b) "Fierzen" Sie nun

$$(\bar{\psi}_1 P_R\psi_2)(\bar{\psi}_3 P_L\psi_4)\,. \tag{7}$$

Vorlesungsseite im Internet:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html`

[2] Die mathematische Formulierung ist beispielsweise zu finden in: C. C. Nishi, "Simple derivation of general Fierz-like identities," Am. J. Phys. **73**, 1160 (2005) [hep-ph/0412245].