10. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 09. Januar 2017 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (5 Punkte)

a) Wie lautet Fermis Goldene Regel und wann ist sie gültig?

b) Was besagt das optische Theorem?

c) Was ist die S-Matrix und welche Rolle spielt sie für die Hochenergiephysik?

d) Geben Sie die Klein-Gordon-Gleichung, die Maxwellgleichungen und die Diracgleichung mit ihren zugehörigen Lagrangedichten in kovarianter Schreibweise an. Was ist der fundamentale Unterschied zwischen den durch sie beschriebenen Teilchen?

e) Nennen Sie eine Motivation für die Einführung von Quantenfeldern.

f) Geben Sie das quantisierte Klein-Gordon-, das quantisierte Dirac- und das quantisierte Photonfeld an.

g) Das Wicksche Theorem besagt zum Beispiel für eine beliebige Anzahl n reeller Skalarfelder $\phi(x)$

$$\begin{aligned} T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\} =& N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\} \\ & + \text{alle möglichen Kontraktionen der Felder}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei T die Zeitordnung und N die Normalordnung bezeichnen. Beschreiben Sie anhand dieses Beispiels kurz schematisch, was das Wicksche Theorem mit Feynmandiagrammen zu tun hat.

h) Erklären Sie das Auftreten von Spinsummen in der Berechnung von Wirkungsquerschnitten physikalisch.

i) Warum ist kein Massenterm $M_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ in der QED-Lagrangedichte erlaubt?

j) Was ist die Ward-Identität und welche Konsequenz hat sie für Photonen?

k) Zeichnen sie alle in niedrigster nichttrivialer Ordnung zum Prozess der Bhabha-Streuung $e^+e^- \to e^+e^-$ beitragenden Feynmandiagramme.

l) Welcher Erhaltungssatz korrespondiert zur $U(1)$-Eichsymmetrie?

Aufgabe 2: Partonverteilungsfunktionen (5 Punkte)

a) Auf der Webseite `http://hepdata.cedar.ac.uk/pdf/pdf3.html` können Sie die Partonverteilungsfunktionen $xf(x, Q^2)$ als Funktion der Bjorken Variablen x zeichnen lassen. Verwenden Sie die Daten der (G)JR Gruppe, Satz JR09FFnnlo und zeichnen Sie die Partonverteilungsfunktionen der Quarks and Gluonen mit $Q^2 \in \{0.1, 1, 10\}\ \text{GeV}^2$. Interpretieren Sie die Graphen.

b) Für die Partonverteilungsfunktionen können Summenregeln hergeleitet werden. Aus der Definition des Gesamtimpulses des Protons folgt

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x \sum_i f_i(x) = 1\,. \tag{2}$$

Betrachten Sie die Verteilungsfunktionen $u_v(x)$, $d_v(x)$, $s(x)$, $\bar{s}(x)$ und $g(x)$, wobei der Index v die Valenz-Quarks bezeichnet und nicht indizierte Quarks virtuelle, See-Quarks, sind.

Welche Summenregeln folgen aus der elektrische Ladung $Q = +1$ und der verschwindenden Strangeness $S = 0$ des Protons?

Aufgabe 3: Isospindrehungen für Quarks und Antiquarks **(5 Punkte)**

Die up- und down-Quarkfelder können als $SU(2)$-Isospin-Dublett $q = (u,\, d)^T$ geschrieben werden, wobei für die Einträge q_1 und q_2 eines allgemeinen Isospindubletts $(q_1, q_2)^T$ $I_3(q_1) = 1/2$ und $I_3(q_2) = -1/2$ gilt. Hierbei bezeichnet I_3 die dritte Komponente des Isospins. Im Folgenden wollen wir die Transformation eines solchen Dubletts unter einer Rotation U im Isospinraum untersuchen. Die Rotation ist gegeben durch

$$q' = Uq \qquad \text{mit} \qquad U = \exp\left(i\vec{\phi}\vec{\tau}\right) \tag{3}$$

mit den Winkeln ϕ_i und den Generatoren der Drehung $\tau_i = \sigma_i/2$, wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind.

a) Berechnen Sie U und $q' = Uq$ für eine Rotation um $\vec{\phi} = (0,\, \pi,\, 0)^T$.

b) Wir fragen uns nun, wie das Dublett der Antiquarks aussieht.
Die Antiquarks gehören zur sogenannten konjugierten Darstellung der $SU(2)$, d.h. es gilt bezüglich des Isospins "$\overline{u} = u^*$" und "$\overline{d} = d^*$". Die Anführungszeichen sollen hierbei andeuten, dass die Relationen nicht für die gesamten Felder, sondern nur für ihren jeweiligen Isospinanteil gültig sind. (Dies ist der Fall, weil der Diracanteil eines Feldes seinen Isospinanteil unbeeinflusst lässt, da die beiden Anteile zu verschiedenen Räumen gehören.)
Wegen der Gell-Mann-Nishijima-Relation gilt $I_3(\overline{u}) = -I_3(u)$ und $I_3(\overline{d}) = -I_3(d)$. Daher ist der Ansatz $\overline{q} = (a\overline{d},\, b\overline{u})^T$ für komplexe Zahlen a, b mit $|a| = |b| = 1$ sinnvoll.
Gehen Sie nun wie folgt vor: Konjugieren Sie Gleichung (3) komplex und drücken Sie den gefundenen Ausdruck durch ihren Ansatz für die Antiquarkdubletts aus. Wie müssen Sie a und b wählen, damit das Antiquarkdublett tatsächlich ein Dublett ist, das heißt, dass

$$\overline{q}' = U\overline{q} \tag{4}$$

gilt?

Hinweis: Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a) zur Bestimmung der Koeffizienten.

Aufgabe 4: $e^+e^- \to \pi^0$ **(5 Punkte)**

Bei der Elektron-Positron Paarvernichtung können im Endzustand sowohl neutrale ρ-Mesonen ($J^P = 1^-$) als auch Pionen (0^-) erzeugt werden. Die Zerfallskonstante des Pions f_π sei definiert mittels

$$\langle \pi^0(p)|\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q|0\rangle = i f_\pi p^\mu\,, \tag{5}$$

wobei p^μ der Viererimpuls des Pions ist.

a) Zeigen Sie, dass die Streuamplitude für $e^+e^- \to \pi^0$ in niedrigster Ordnung in QED gegeben ist als

$$\mathcal{A}(e^+e^- \to \pi^0) = -i\bar{v}_{e^+}\gamma_\mu u_{e^-}\frac{e^2 Q_q}{m_\pi^2}\langle\pi^0(p)|\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q|0\rangle\,, \tag{6}$$

wobei Q_q die Ladung des Quarks q in Einheiten der Elementarladung e ist.

b) Zeigen Sie, dass die Streuamplitude (6) aufgrund der Stromerhaltung verschwindet.

c) Für das ρ-Meson können die Matrixelemente des Vektorstroms und Axialvektorstroms geschrieben werden als

$$\langle\rho(p,\varepsilon)|\bar{q}\gamma^\mu q|0\rangle = a\varepsilon^\mu + bp^\mu\,, \tag{7}$$
$$\langle\rho(p,\varepsilon)|\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q|0\rangle = cp^\mu(\varepsilon\cdot p)\,, \tag{8}$$

wobei a, b, c Formfaktoren, ε^μ der Polarisationsvektor und p^μ der Viererimpuls des ρ-Mesons sind. Zeigen Sie, dass b aufgrund fundamentaler QCD Symmetrien verschwindet. Was folgt für den Term proportional zu c?

Vorlesungsseite im Internet:
`http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html`