5. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 21. November 2016 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Lagrange-Dichten **(5 Punkte)**

(a) Leiten Sie für eine Lagrange-Dichte $\mathscr{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)]$ die allgemeine Form der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen aus der Bedingung der stationären Wirkung

$$\delta \int \mathrm{d}^4 x \, \mathscr{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)] = 0$$

her und zeigen Sie , dass $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}'$ mit

$$\mathscr{L} - \mathscr{L}' = \partial^\mu f_\mu(\phi)$$

physikalisch äquivalent sind, wobei f_μ ein beliebiger Viererstrom ist.
Hinweis: Für Ihre Rechnungen kann eine Verallgemeinerung des Gaußschen Integralsatzes vom $\mathbb{R}^3$ auf den Minkowskiraum hilfreich sein:

$$\int_G d^4 x \, \partial_\mu f(\phi, \partial_\mu\phi) = \int_{\partial G} d\sigma_\mu \, f(\phi, \partial_\mu\phi)$$

Dabei ist G das Integrationsvolumen im Minkowskiraum und σ_μ die Oberflächennormale zum Rand ∂G.

(b) Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (a), um $\mathscr{L}_{\text{QED}}$ formal in ψ und $\bar\psi$ zu symmetrisieren, das heißt

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} \to \mathscr{L}'_{\text{QED}} = \frac{1}{2}\bar\psi \mathrm{i}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar\psi)\mathrm{i}\gamma^\mu\psi - m\bar\psi\psi + e\bar\psi A^\mu\gamma_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad .$$

Bestimmen Sie aus $\mathscr{L}'_{\text{QED}}$ die Bewegungsgleichungen für ψ und $\bar\psi$. Warum können die Felder ψ und $\bar\psi$ getrennt variiert werden?

(c) Das Noether-Theorem ordnet jeder kontinuierlichen Symmetrie der Lagrange-Dichte eine Erhaltungsgröße zu. Zeigen Sie, dass die $U(1)$-Invarianz von $\mathscr{L}_{\text{QED}}$ die Erhaltung der elektrischen Ladung impliziert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der (Noether-)Strom $e\bar\psi\gamma^\mu\psi$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 2: Die Helizität des Photons **(5 Punkte)**
Die Helizität des Photons H ist definiert als die Projektion des Photondrehimpulses $\vec{J}$ auf die Richtung des Impulses $\vec{k}$:

$$H = \vec{J} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \tag{1}$$

Der Impulsoperator für Vierervektoren lautet

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \vec{\tilde{J}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad \vec{\tilde{J}} = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3), \qquad (\tilde{J}_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}, \tag{2}$$

mit den Generatoren der Drehungen in der adjungierten Darstellung $\tilde{J}_a$ und $a,b,c \in \{1,2,3\}$. Die Polarisationsvektoren ϵ^μ sind die Eigenvektoren des Helizitätsoperators eines Photons, welches sich in z-Richtung mit dem Viererimpuls $k^\mu = (E,0,0,E)$ bewegt. Konstruieren Sie die Polarisationsvektoren so, dass die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$H\epsilon^\mu = h\epsilon^\mu, \qquad \epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1. \tag{3}$$

Die Eigenvektoren mit Eigenwert $h = -1$ $(+1)$ werden als linkhändige (rechtshändige) Photonen bezeichnet.

Aufgabe 3: Helizität der Fermionen **(5 Punkte)**

Der Helizitätsoperator für Fermionen ist gegeben durch

$$h = \frac{1}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie die Wirkung von h auf die Spinoren $u_r(p)$ und $v_r(p)$ mit $r = 1,2$ (siehe Blatt 3).

(b) Betrachten Sie nun die Spinoren im relativistischen Grenzfall und berechnen Sie die Wirkung des Helizitätsoperators h auf die Spinoren erneut. Diskutieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 4: Fermiontensoren **(5 Punkte)**

Bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen treten häufig Ströme der Gestalt

$$L_\mu^V = [\bar{v}^r(p_2)\gamma_\mu u^s(p_1)] \qquad \text{und} \qquad L_\mu^A = [\bar{v}^r(p_2)\gamma_\mu\gamma_5 u^s(p_1)] \tag{5}$$

auf. Dabei steht V für eine vektorielle und A für eine axiale Kopplung. Durch die Spinoren $u^s(p)$ und $v^s(p)$ werden Teilchen- und Antiteilchen mit Spin s und Impuls p beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Fermiontensoren

$$L_{\mu\nu}^{VV} = \sum_{r,s} L_\mu^V L_\nu^{V*} \qquad \text{und} \qquad L_{\mu\nu}^{AA} = \sum_{r,s} L_\mu^A L_\nu^{A*} \tag{6}$$

mit Hilfe der Spinsummen.

(b) Wie verändern sich die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) unter Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen, also unter

$$L_\mu^V \to L_\mu^V = [\bar{u}^s(p_3)\gamma_\mu v^r(p_4)]? \tag{7}$$

Vorlesungsseite im Internet:

http://people.het.physik.tu-dortmund.de/~ghiller/WS1617ETT.html