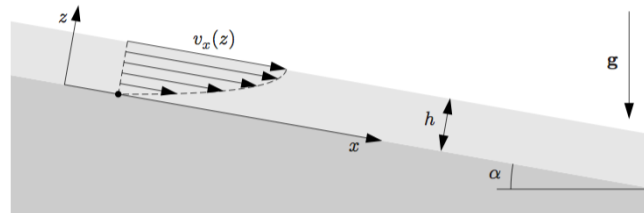


Aufgabe 1: Navier-Stokes-Gleichung

(5 Punkte)

Ein inkompressibler Flüssigkeitsfilm der Dicke h fließe an einer schrägen Ebene hinunter, die unendlich lang und weit ist. Dabei wirkt zwischen dem Flüssigkeitsfilm und der schrägen Ebene eine Reibungskraft, die zusammen mit der Gewichtskraft einen konstanten Fluss in x -Richtung erzeugt.



- a) Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben das Strömungsverhalten newtonscher Flüssigkeiten und Gase. Die allgemeine Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Fluide lautet:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Dabei ist ρ die Dichte, $\vec{v}(\vec{x})$ das Geschwindigkeitsfeld, $p(\vec{x})$ der Druck, \vec{F}_{ext} die externen Kräfte und η die hier konstante, dynamische Viskosität.

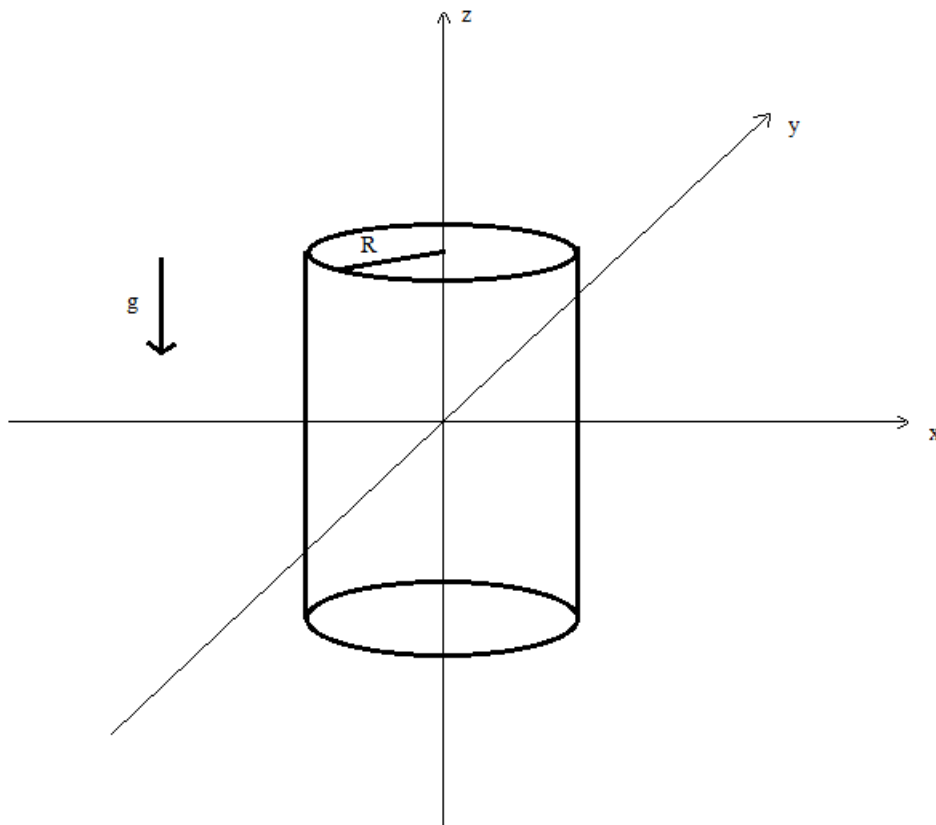
Geben Sie die Navier-Stokes-Gleichung für dieses System an, indem Sie die allgemeine Form durch Symmetrieüberlegungen vereinfachen und die externen Kräfte bestimmen.

- b) Reduzieren Sie das Problem auf zwei unabhängige, lineare Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit $v_x(z)$ und den Druck $p(z)$.

Aufgabe 2: Lagrange-Mechanik**(5 Punkte)**

Die Bahn eines Teilchens der Masse m sei auf eine Zylinderoberfläche mit Radius R beschränkt. Zusätzlich zur Gravitation ist das Teilchen einem Potential $V_Z = k\vec{r}^2/2$ mit einer Konstanten k und dem Ortsvektor \vec{r} des Teilchens ausgesetzt. Der Zylinder ist in der Abbildung unten dargestellt.

- Wählen Sie geeignete Koordinaten und bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
- Bestimmen Sie die Euler-Lagrangegleichungen des Systems und diskutieren Sie Erhaltungsgrößen.
- Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen an und charakterisieren Sie diese kurz.



Aufgabe 3: Kurzfragen

(10 Punkte)

- (a) Nennen Sie mindestens zwei Vorteile der Lagrangemechanik, bzw. Hamiltonmechanik gegenüber der Newtonschen Mechanik.
- (b) Was ist eine zyklische Koordinate? Was können Sie aus der Existenz einer zyklischen Koordinate folgern?
- (c) Welche Erhaltungsgröße gibt es in einem mechanischen System, das eine Symmetrieachse \vec{e}_z hat?
- (d) Geben Sie die Ladungsverteilung einer Punktladung q am Ort \vec{r}_0 an.
- (e) Geben Sie die das elektrische Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ an und berechnen Sie daraus explizit das elektrische Feld einer Punktladung mit der o.g. Ladungsverteilung.
- (f) Beschreiben Sie die Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ in Worten.
- (g) Welcher fundamentale Erhaltungssatz wäre verletzt, wenn die Lenzsche Regel wie folgt lautete: »Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert eine Spannung, die einen Kreisstrom in der Leiterschleife bewirkt, welcher ein Magnetfeld erzeugt, das die Änderung des magnetischen Flusses verstärkt.« ?
- (h) Welche Objekte kennen Sie, die in der speziellen Relativitätstheorie (per Definition) lorentzinvariant sind?
- (i) Sei $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ die Lorentztransformation eines Vierervektors. Folgern Sie aus der Forderung nach Lorentzinvarianz der o.g. Objekte eine Bedingung an die zulässigen Tensoren Λ^{μ}_{ν} .
- (j) Das Garagenparadoxon ist das Gegenstück zum Zwillingsparadoxon. Stellen Sie sich folgendes System vor: Eine Leiter, mit Ruhelänge L_0 bewegt sich mit großer Geschwindigkeit auf eine Garage mit zwei gegenüberliegenden Toren und Ruhelänge L_0 zu, sodass die Leiter die Garage passiert. Aus Sicht der Garage ist die Leiter verkürzt und passt vollständig in die Garage, das heißt es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die beiden Garagentore gleichzeitig geschlossen werden können und sich die Leiter in der Garage befindet. Aus Sicht der Leiter ist die Garage verkürzt, sodass die Leiter nicht vollständig in die Garage passt. Es gibt also keinen Zeitpunkt, zu dem die beiden Tore gleichzeitig geschlossen werden können, sodass sich die Leiter in der Garage befindet. Wie lässt sich das Paradoxon auflösen?
Lesen Sie sich hierfür den Artikel
https://de.wikipedia.org/wiki/Paradoxon_der_L%C3%A4ngenkontraktion
durch und erklären Sie in Ihren **eigenen** Worten.