12. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 26. Januar 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Kontinuitätsgleichung **(5 Punkte)**

In dieser Aufgabe wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

für eine Flüssigkeit in einem großen Volumen V betrachtet, die die zeitliche Ableitung einer Dichte $\varrho(t)$ mit der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{r}, t)$ in Beziehung setzt. (In dieser Aufgabe soll $\varrho(t)$ räumlich konstant sein!)
Das Geschwindigkeitsfeld sei durch

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r) \cos(\omega t) \vec{e}_r \tag{2}$$

gegeben, wobei $v(r)$ eine Funktion von nur einer Variablen $r := |\vec{r}|$, $r \geq 0$ ist.

(a) Welche Bewegung vollführt die Flüssigkeit in einem sehr kleinen Flüssigkeitsvolumen ΔV in der Nähe eines Ortes $\vec{r}_0$?

(b) Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um eine Differentialgleichung in $\varrho(t)$ und $v(r)$ zu erhalten.

(c) Bringen Sie die erhaltene Differentialgleichung in die Form $F(r) = G(t)$ und begründen Sie, warum es eine Konstante μ gibt, mit $F(r) \equiv \mu$, $G(t) \equiv \mu$.

Aufgabe 2: Euler, Burgers, Transport und Wellen **(5 Punkte)**
In dieser Aufgabe werden die Zusammenhänge verschiedener Differentialgleichungen untersucht, die für die Physik von Wellen und der Hydrodynamik wichtig sind.
Eine Flüssigkeit werde durch die Euler'sche Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\varrho} \vec{\nabla} p = 0 \tag{3}$$

beschrieben.

(a) Vereinfachen Sie die Euler'sche Gleichung, indem Sie annehmen, dass $\vec{v}(\vec{r}, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ gilt, und zeigen Sie, dass der Druck $p(\vec{r}, t)$ auf jeder Ebene $\perp \vec{e}_x$ konstant ist (d.h., dass p nur von x und t abhängt).

(b) Informieren Sie sich über die "reibungsfreie Burgersgleichung" und zeigen Sie, dass für $\frac{\partial}{\partial x} p = 0$ die Euler'sche Gleichung in die "reibungsfreie Burgersgleichung" übergeht.

Nun werden die Transportgleichung(en)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \tag{4}$$

betrachtet, mit einer Funktion $u = u(x, t)$ und einer Konstanten $c \neq 0$.

(c) Zeigen Sie: Löst u die Transportgleichung "+" mit der Konstanten c, dann löst u auch die Transportgleichung "−" mit der konstanten $-c$. Es darf also von "der" Transportgleichung gesprochen werden.

(d) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Transportgleichung auch eine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0 \tag{5}$$

ist.

(e) Benutzen Sie die eben genannte Tatsache, um zu zeigen, dass jede Funktion $f(x \pm ct)$ die Wellengleichung löst (ohne f in die Wellengleichung einzusetzen!).

Aufgabe 3: Chaotisches Billard **(5 Punkte)**

Auf einem rechteckigen Billardtisch mit einer kurzen Kante der Länge a und einer langen Kante der Länge $L \gg a$ befindet sich eine Kugel, die reibungsfrei rollt und elastisch mit der Bande stößt. Die Kugel befinde sich mittig und $2a$ von der rechten kurzen Bande entfernt und werde 45° in Richtung der kurzen Bande angestoßen.

(a) Skizzieren Sie dieses Problem und die Bahn der Kugel.

(b) Was passiert, wenn die Kugel um ein Stück Δx in Richtung der kurzen Kante verschoben wird?

Nun wird die kurze Kante durch einen Halbkreis mit Radius $a/2$ ersetzt.

(c) Wiederholen Sie die letzten zwei Teilaufgaben.

(d) Erklären Sie in diesem Zusammenhang den Begriff des "deterministischen Chaos".

Aufgabe 4: Myonenzerfall **(5 Punkte)**

Myonen, elektrisch geladene Elementarteilchen, welche in Elektronen und Neutrinos zerfallen, entstehen durch die Wechselwirkung kosmischer Strahlung mit der Erdatmosphäre in ca. 10 bis 15 km Höhe. Sie dürfen annehmen, dass sie mit einer Geschwindigkeit von $0{,}998c$ in Richtung Erdeoberfläche fliegen. Informieren Sie sich über die mittlere Lebensdauer von Myonen und überprüfen Sie, ob die Myonen auf der Erde detektiebar sind, wenn relativistische Effekte ignoriert werden. Dabei dürfen Sie davon ausgehen, dass nach der dreifachen mittleren Lebensdauer die Myonen nicht mehr nachweisbar sind.
Was ändert sich, wenn relativistische Effekte berücksichtigt werden?