11. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 19. Januar 2016 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ **(6 Punkte)**

Drehungen gehören zu den abstandserhaltenden Abbildungen im $\mathbb{R}^3$. Sie können durch Matrizen M beschrieben werden mit Hilfe der Abbildungsvorschrift: $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$.

(a) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellung M_1 einer Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$.

Es sei nun ein neues Koordinatensystem definiert durch die neue Basis $\vec{e}_i' = M_1\vec{e}_i$.

(b) Transformieren Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in das neue Koordinatensystem.

(c) Verifizieren Sie, dass das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ unter der durch M_1 beschriebenen Drehung invariant bleibt.

(d) Zeigen Sie, dass der Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ in das neue Koordinatensystem überführt wird mittels $\vec{\nabla}' = M_1^T \vec{\nabla}$. Welche Objekte haben außerdem dieses Transformationsverhalten?

Aufgabe 2: Der Minkowskiraum **(7 Punkte)**

Der Minkowskiraum ist ein vierdimensionaler Vektorraum, dessen sog. *kontravariante* Vektoren ("Index oben") Punkte der Raumzeit beschreiben:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dabei läuft der Index μ der Konvention nach von 0 bis 3, c ist die Lichtgeschwindigkeit, t die Zeitkoordinate und $\vec{x}$ ein Ortsvektor aus dem $\mathbb{R}^3$.
Weiterhin definiert man *kovariante* Vektoren ("Index unten") gemäß:

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{mit} \quad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0, & sonst. \end{cases} \tag{2}$$

Es wird die *Einsteinsche Summenkonvention* verwendet: Zwei gleiche Indizes enthalten implizit automatisch eine Summation über diesen Index. Der Tensor $g_{\mu\nu}$ heißt *Metrik* des Minkowskiraumes; sie überführt kontravariante Vektoren in kovariante Vektoren (und umgekehrt), d.h. sie "hebt und senkt Indizes".

(a) Die inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ ist definiert mittels: $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu{}^\sigma$. Berechnen Sie die Ausdrücke $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ und $g_\mu{}^\nu$.

(b) Das Skalarprodukt der Vektoren x^μ, y^μ im Minkowskiraum ist gegeben durch den Ausdruck $x_\mu y^\mu$. Wie lautet dieser in Komponenten? Zeigen Sie, dass dieses Skalarprodukt invariant unter räumlichen Drehungen ist.
Hinweis: Räumliche Drehungen können im Vierdimensionalen beschrieben werden durch Abbildungsmatrizen in blockdiagonaler Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, *mit M wie in Aufgabe 1. Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus dieser Aufgabe.*

Lineare Abbildungen $\Lambda^\mu{}_\nu$ auf dem Minkowskiraum die das Skalarprodukt $x_\mu y^\mu$ erhalten heißen *Lorentztransformationen*. Unter ihnen transformieren kontravariante Vektoren in neue gestrichene Koordinaten gemäß $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$.

(c) Wie transformiert ein **kovarianter** Vektor x_μ unter einer Lorentztransformation Λ? Wie transformiert der Ableitungsvektor $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$?

(d) Geben Sie mit Hilfe Ihres Wissens aus der Vorlesung explizit die Matrixdarstellung von Λ für eine Koordinatentransformation in ein sich in y-Richtung mit Relativgeschwindigkeit v bewegendes System an.

Aufgabe 3: Zeitdilatation und das Zwillingsparadoxon **(7 Punkte)**

Betrachten Sie ein Raumschiff mit Masse m, das sich auf geradem Weg mit konstanter Beschleunigung $a = 10\frac{m}{s}$ von der Erde wegbewegt. Nach vergangener Eigenzeit von $\tau = 2$ Jahren bremst das Raumschiff mit der gleichen Beschleunigung wieder ab. Sobald es Stillstand erreicht hat, begibt es sich auf gleiche Weise auf den Rückflug zurück zum Ausgangspunkt.

(a) Berechnen Sie die Differenz in Eigenzeit τ des Reisenden und der Koordinatenzeit t eines auf der Erde ruhenden Beobachters zum Zeitpunkt der Rückkehr des Raumschiffs.
Bestimmen Sie dafür zuerst aus der relativistischen Bewegungsgleichung $m\frac{d^2x}{d\tau^2} = \gamma m \cdot a$ die Geschwindigkeit des Raumschiffs $v(t) = \frac{dx}{dt}$ im Koordinatensystem der Erde. Mit diesem Ergebnis lässt sich dann die Eigenzeit τ in die Koordinatenzeit t überführen.

(b) Aus Sicht eines Beobachters im Raumschiff bleibt das Schiff stationär, während die Erde sich bewegt. Lässt sich eindeutig sagen, welcher Beobachter schneller altert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis:
Es ist für das Bearbeiten der Aufgabe nicht notwendig, explizit Boosts durchzuführen. Setzen Sie stattdessen über die Zeitdilatation an. Möglicherweise hilfreich ist die folgende Ableitung:

$$\frac{d}{dx} arsinh(bx) = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2 x^2}} \tag{3}$$

.