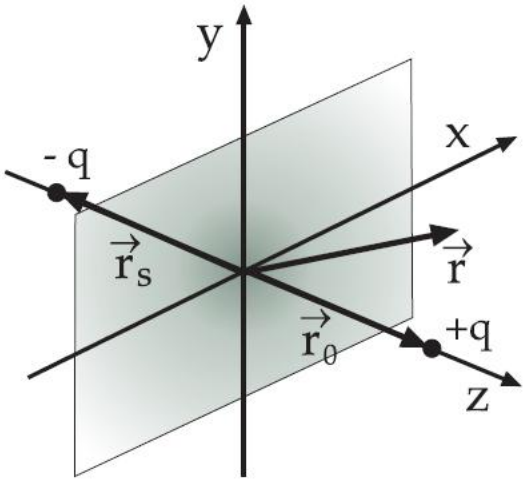
9. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 5. Januar 2016 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Spiegelladungsmethode **(5 Punkte)**

Betrachten Sie die folgende Anordnung einer Punktladung q am Punkt $\vec{r}_0 = z_0\vec{e}_z$ und einer unendlich ausgedehnten, leitenden, geerdeten Ebene bei $z = 0$.



Ein leitendes Objekt stellt eine Äquipotentialfläche dar, auf welcher die elektrischen Feldlinien senkrecht stehen. Um diese Forderung zu erfüllen, konstruiert man eine Spiegelladung, die sich an der Position $\vec{r}_S = -z_0\vec{e}_z$ befindet und die Ladung $-q$ besitzt. Physikalisch ist diese Ladung nicht existent und modelliert lediglich die auf der Platte durch die Ladung q gebildete Influenzladung.

(a) Berechnen Sie das Potential, sowie das elektrische Feld der Anordnung.

(b) Berechnen Sie die Influenzladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ auf der Platte. Wie groß ist die gesamte Influenzladung?
Hinweis: Für das elektrische Feld auf der Platte (bei $z = 0$) gilt $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kraft $\vec{F}_{\text{infl}}$, die die Influenzladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ nach dem Coulomb'schen Gesetz auf die Punktladung bei $\vec{r}_0$ ausübt, der Coulomb-Kraft zwischen der Punktladung und der fiktiven Spiegelladung entspricht.

Aufgabe 2: Schwingender Dipol **(4 Punkte)**

Betrachten Sie eine kreisförmige Leiterschleife in der xy-Ebene mit Strom I und Radius R. Im Mittelpunkt der Leiterschleife befindet sich ein magnetischer Dipol m mit der Masse M, der entlang des von der Schleife erzeugten Magnetfeldes ausgerichtet ist. Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz des Dipols in seiner Bewegung entlang der Achse in der Näherung kleiner Abstände zur Schleifenebene.

Aufgabe 3: Rotierende Kugel mit Oberflächenladung **(6 Punkte)**

Eine Kugel mit Radius R und der konstanten Oberflächenladungsdichte σ rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine ihrer Symmetrieachsen.

(a) Stellen Sie zunächst einen Ausdruck für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ auf. Gehen Sie dazu von der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(|\vec{r}| - R)$ aus.

(b) Berechnen Sie nun das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{1}$$

Führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus und wählen Sie die Koordinaten dabei so, dass die z-Achse ($\theta = 0$) in Richtung des Ortsvektors $\vec{r}$ zeigt. Bringen Sie das Integral mithilfe einer geeigneten Substitution auf die Form

$$I = \int \mathrm{d}\chi \frac{\chi}{\sqrt{a - b\chi}}. \tag{2}$$

Das Integral hat die Lösung

$$I = -\frac{2}{3b^2}(2a + b\chi)\sqrt{a - b\chi}. \tag{3}$$

(c) Berechnen Sie aus dem zuvor bestimmten Vektorpotential das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $|\vec{r}| < R$ und $|\vec{r}| > R$.

(d) Vergleichen Sie das resultierende Magnetfeld für $|\vec{r}| > R$ mit dem Feld eines magnetischen Dipols.

Aufgabe 4: Eichtransformationen **(5 Punkte)**

Sei $\vec{B}(\vec{r}) = B\vec{e}_z$ mit $B = \text{const.}$ ein homogenes Vektorfeld. foo

(a) Bestimmen Sie ein Vektorfeld $\vec{A}$ so, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \tag{4}$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz bei dem alle Komponenten von $\vec{A}$ linear in den Koordinaten x, y und z sind.

(b) Finden Sie (explizit) zwei *linear unabhängige* Lösungen $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ von (4) und zeigen Sie, dass auch jede Linearkombination

$$\vec{A}' = \alpha_1\vec{A}_1 + \alpha_2\vec{A}_2 \tag{5}$$

mit $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ Gleichung (4) löst.

(c) Sei nun $\phi(\vec{r})$ ein differenzierbares, skalares Feld. Zeigen Sie: Ist $\vec{A}$ eine Lösung von (4), dann ist auch

$$\vec{A}'' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \tag{6}$$

eine Lösung.

(d) Zeigen Sie, dass sich die Differenz der Lösungen $\vec{A}'$ und $\vec{A}$ als Gradient eines skalaren Feldes schreiben lässt und bestimmen Sie das Feld explizit.

Aufgabe 5: Wiederholung **(Keine Punkte)**

Im Folgenden finden Sie einige Fragen zu den Themen der Vorlesung, die als Orientierungshilfe zur Wiederholung des Stoffs dienen sollen.

(a) Formulieren Sie die Newton'schen Gesetze. In welchen Bezugssystemen gelten diese? Unter welchen Transformationen bleiben sie invariant?

(b) Was versteht man unter Trägheitskräften? Was verursacht sie?

(c) Was sind konservative Kräfte? Wie hängen sie mit der potentiellen Energie eines Systems zusammen? Ist die Coulomb-Kraft konservativ?

(d) Auf welchen Prinzipien basiert der Lagrangeformalismus? Vergleichen Sie diese Formulierung der klassischen Mechanik mit der Newton'schen Mechanik.

(e) Wie unterscheiden sich Lagrange- und Hamiltonformalismus? Auf welche Art sind sie mathematisch miteinander verbunden?

(f) Was sind Erhaltungsgrößen? Wie können Sie ausgehend von der Lagrangefunktion eines Systems dessen Erhaltungsgrößen bestimmen?

(g) Wie ist die δ-Distribution definiert? Welche ihrer Eigenschaften kennen Sie?

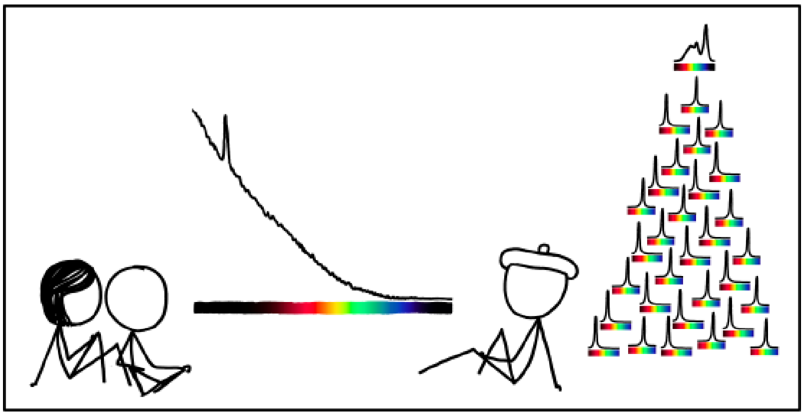
(h) Was ist eine Greensfunktion? Wozu verwendet man sie?

(i) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential einer Punktladung ausgehend von der Poissongleichung

$$\triangle\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \tag{7}$$

(j) Wie unterscheiden sich elektrische und magnetische Felder?

(k) Warum ist das Innere einer elektrisch geladenen, leitenden Hohlkugel feldfrei?



https://xkcd.com/1308/

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!