5. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 24. November 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Dirac'sche Delta-Distribution **(5 Punkte)**

Die Dirac'sche δ-Distribution ist definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r})\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})\mathrm{d}^3 r = f(\vec{a}). \tag{1}$$

Im Eindimensionalen wird aus dem Volumen- ein Wegintegral über die reellen Zahlen. $\delta(x-a)$ verschwindet dabei für alle $x \neq a$, in $x = a$ ist die δ-Distribution nicht definiert, allerdings das Integral über diese nach (1).

(a) Zeigen Sie, dass die Dirac'sche δ-Funktion die Ableitung der Heaviside-Funktion $\theta(x)$ ist.

$$\int_a^b f(x)\theta'(x)dx = f(0) \quad (a < 0 < b)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

im Limes $\lim_{a\to 0}\delta_a(x) = \delta(x)$ obige Eigenschaft (1) im Eindimensionalen erfüllt (Sie können davon ausgehen, dass Limes und Integral vertauscht werden dürfen).

(c) Beweisen Sie die Relationen (mit $b \neq 0$)

$$\delta(bx) = \frac{1}{|b|}\delta(x),$$
$$\delta(x^2-b^2) = \frac{1}{2|b|}(\delta(x-b)+\delta(x+b)),$$
$$\lim_{a\to 0}\int f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta_a(x)\mathrm{d}x = -f'(0),$$
$$\delta(x) = \int \frac{1}{2\pi}\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k.$$

(d) Zeigen Sie, dass in drei Dimensionen $\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$ in kartesischen Koordinaten $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ entspricht. Wie muss der Ausdruck in Kugelkoordinaten abgeändert werden?

Hinweis:

Die Heaviside-Funktion ist definiert als

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 2: Massenpunkt auf dem Kegelmantel **(8 Punkte)**

Eine Punktmasse bewegt sich reibungsfrei und unter Einfluss der Graviation auf der Innenseite eines Kegelmantels mit Öffnungswinkel α (siehe Abbildung).

(a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf und finden Sie die virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$. Überlegen Sie sich in welchem Koordinatensystem sich das Problem am einfachsten beschreiben lässt.

(b) Stellen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips die Bewegungsgleichungen des Teilchens auf.

(c) Benutzen Sie nun den Lagrange-Formalismus, um Ihr vorheriges Ergebnis zu verifizieren.

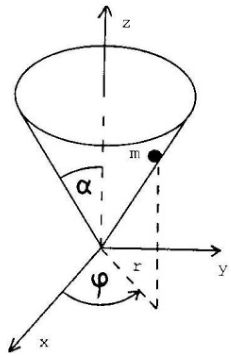

Abbildung 1: Massenpunkt auf Kegelmantel

Aufgabe 3: Beweglich gelagertes Doppelpendel **(7 Punkte)**

Betrachten Sie erneut das Doppelpendel vom vorherigen Übungsblatt, die Masse m_1 ist dabei entlang der x-Achse beweglich gelagert (siehe Abbildung 2).

(a) Führen Sie generalisierte Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrange-Funktion in diesen auf.

(b) Bestimmen Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen des Systems.

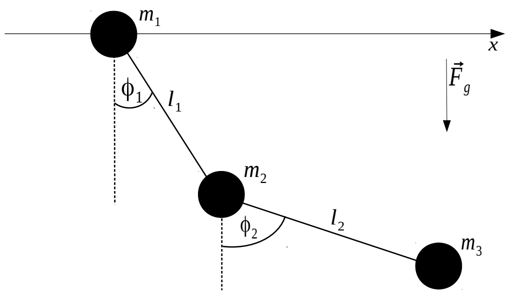

Abbildung 2: Beweglich gelagertes Doppelpendel