4. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2015/2016**
Theoretische Physik I **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Dienstag, den 17. November 2015 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Kegelschnitte (5 Punkte)

Die Schnittmenge eines Kegelmantels mit einer Ebene bildet die Menge der Kegelschnitte. Die Kegelschnitte werden in Polarkoordinaten beschrieben durch

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}\,, \qquad \epsilon, p \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

(a) Skizzieren Sie Kegelschnitte für $\epsilon = 0$, $\epsilon = 1$, $\epsilon > 1$ und $0 < \epsilon < 1$ und benennen Sie deren Formen.

(b) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) für $\epsilon > 1$ in kartesischen Koordinaten geschrieben werden kann als

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad a, b, x_0 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

und bestimmen Sie $a(\epsilon, p)$, $b(\epsilon, p)$ und $x_0(\epsilon, p)$.

Aufgabe 2: Zwangsbedingungen (5 Punkte)

(a) Betrachten Sie ein massives Punktteilchen auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius R. Benennen Sie die Zwangsbedingungen und die Anzahl der Freiheitsgrade. Was ändert sich in der Präsenz eines homogenen Gravitationsfeldes?

(b) Betrachten Sie das ebene Doppelpendel in Abbildung 1. Benennen Sie die Zwangsbedingungen und die Anzahl der Freiheitsgrade. Führen Sie generalisierte Koordinaten ein und geben Sie die Transformationen bezüglich der kartesischen Koordinaten an.

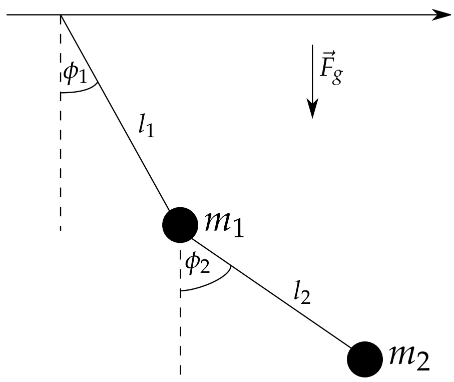

Abbildung 1: Doppelpendel

Aufgabe 3: Das d'Alembert'sche Prinzip **(5 Punkte)**

(a) Was besagt das d'Alembert'sche Prinzip?

(b) Betrachten Sie ein ebenes mathematisches Pendel (Abbildung (1) mit $l_2 = 0$). Bestimmen Sie die virtuelle Verrückung und folgern Sie mit dem d'Alembert'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 4: Levi-Civita Tensor **(5 Punkte)**

Der Levi-Civita Tensor $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist antisymmetrisch in den Indizes $i_1, i_2, ..., i_n$, das heißt

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } (i_1, i_2, ..., i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, ..., n) \text{ ist} \\ -1\,, & \text{wenn } (i_1, i_2, ..., i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, , ..., n) \text{ ist} \end{cases} \tag{3}$$

Was gilt für zwei gleiche Indizes?

(a) Schreiben Sie den Levi-Civita Tensor für $n = 2$ als Matrix.

(b) Betrachten Sie nun $n = 3$. Zeigen Sie, dass mit den kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ gilt

$$\epsilon_{ijk} = \det\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right) \,. \tag{4}$$

(c) Das Kreuzprodukt kann also geschrieben werden als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \,. \tag{5}$$

Verwenden Sie die Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \,, \tag{6}$$

um zu zeigen, dass

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \,. \tag{7}$$