4. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 14. November 2016 17:00 Uhr

Aufgabe 1: Wicksches Theorem **(6 Punkte)**

Beweisen Sie das Wicksche Theorem für zwei *fermionische* Felder, d.h. zeigen Sie, dass

$$T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} = N\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} + \overbracket{\psi(x)\overline{\psi}}(y) \tag{1}$$

mit der Kontraktion zweier fermionischer Felder

$$\overbracket{\psi(x)\overline{\psi}}(y) = \begin{cases} \{\psi^+(x), \overline{\psi}^-(y)\} & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ -\{\overline{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Bemerkungen: Für zwei *skalare* Felder lautet die Relation zwischen zeit- und normalgeordnetem Produkt

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \overbracket{\phi(x)\phi}(y)\}. \tag{3}$$

Mit $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ ist die Kontraktion definiert durch

$$\overbracket{\phi(x)\phi}(y) = \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} \quad . \tag{4}$$

Das normalgeordnete Produkt ist gegeben durch

$$N\{a_k a_p^\dagger a_q\} = a_p^\dagger a_k a_q, \tag{5}$$

es stehen also alle Vernichter rechts von den Erzeugern.
Um das Wicksche Theorem für Fermionen zu formulieren, müssen das zeitgeordnete und das normalgeordnete Produkt für Fermionen verallgemeinert werden. Das zeitgeordnete Produkt erhält ein Minuszeichen für jeden Austausch von Operatoren:

$$T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\overline{\psi}(y) & \text{für } \; x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi}(y)\psi(x) & \text{für } \; y^0 > x^0 \end{cases} \quad . \tag{6}$$

Gleiches gilt für das normalgeordnete Produkt. Zum Beispiel ist

$$N\{a_k a_q a_p^\dagger\} = (-1)^2 a_p^\dagger a_k a_q. \tag{7}$$

Wegen $\psi^+ \mid 0\rangle = 0$ und $\langle 0 \mid \psi^- = 0$ ist es günstig, eine Aufteilung in positive und negative Frequenzen vorzunehmen:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [\underbrace{a_{p,s} u_s(p) e^{-ipx}}_{\propto \psi^+(x)} + \underbrace{b_{p,s}^\dagger v_s(p) e^{ipx}}_{\propto \psi^-(x)}], \tag{8}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s [\underbrace{b_{p,s} \overline{v}_s(p) e^{-ipx}}_{\propto \overline{\psi}^+(x)} + \underbrace{a_{p,s}^\dagger \overline{u}_s(p) e^{ipx}}_{\propto \overline{\psi}^-(x)}]. \tag{9}$$

Aufgabe 2: Wie man ein Dirac-Feld *nicht* quantisiert **(7 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Anti-Vertauschungsrelationen für Fermionen in der 2. Quantisierung hergeleitet:

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab} \tag{10}$$

bei gleichen Zeiten $t = x_0 = y_0$ und mit den Spinorkomponenten a und b.

(a) Führen Sie zum Aufwärmen die kanonische Quantisierung eines skalaren Feldes durch. Starten Sie dafür mit der Lagrangedichte für ein Klein Gordon-Feld:

$$\mathscr{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\phi(x)\right)\left(\partial^\mu\phi(x)\right) - m^2\phi(x)^2\right] \tag{11}$$

Berechnen Sie das zu

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{+ipx}\right) \tag{12}$$

konjugierte Feld $\pi(x)$ und bestätigen Sie die Vertauschungsrelation $\left[\phi(x), \pi(x)\right] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ zu gleichen Zeiten $t = x_0 = y_0$ mit Hilfe der Vertauschungsrelation $\left[a_p, a_q^\dagger\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$

(b) Gehen Sie nun im Gegensatz zur Vorlesung aber analog zu (a) davon aus, dass Fermionzustände symmetrisch sind. Berechnen Sie den Kommutator

$$[\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)] \quad \text{mit} \quad t = x_0 = y_0. \tag{13}$$

Verwenden Sie dafür die Fourier-Zerlegungen (8) und (9) aus Aufgabe 1 sowie

$$[a_{p,r}, a_{q,s}^\dagger] = [b_{p,r}, b_{q,s}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta_{rs}. \tag{14}$$

Die Indizes p, q beschreiben Impulse der Fermionen und r, s ihre Spinzustände. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Relation (10). Folgern Sie, dass (8) und (9) nicht die korrekten Fourier-Zerlegungen sein können.

(c) Die zu (14) gehörenden Fourier-Entwicklungen der Felder ψ und $\overline{\psi}$ lauten:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s (a_{p,s}u_s(p)e^{-ipx} + b_{p,s}v_s(p)e^{ipx}), \tag{15}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s (a_{p,s}^\dagger\overline{u}_s(p)e^{ipx} + b_{p,s}^\dagger\overline{v}_s(p)e^{-ipx}). \tag{16}$$

Was beschreiben in diesem Fall die Ausdrücke

$$\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle \quad \text{und} \quad \langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle? \tag{17}$$

Welches Problem ergibt sich bezüglich der Kausalität? *Zur Lösung dieses Aufgabenteils ist keine exakte Rechnung erforderlich.*

(d) Verwenden Sie (15) und (16) um die Hamilton-Funktion

$$H = \int d^3x\, \mathscr{H} \tag{18}$$

aus der Lagrangedichte des freien Diracfeldes herzuleiten

$$\mathscr{L}_D = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x). \tag{19}$$

Auch hier stößt man auf ein Problem. Welches? Wie lässt sich dieses Problem unter der Annahme lösen, dass

$$\{b_{p,r}, b^\dagger_{q,s}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\delta_{rs}? \tag{20}$$

Wie sehen dann die Fourier-Entwicklungen von ψ und $\overline{\psi}$ aus?

Hinweis: Die folgenden Relationen könnten für die Rechnung hilfreich sein:

$$(p\!\!\!/ - m)u(p) = 0 \qquad (p\!\!\!/ + m)v(p) = 0 \tag{21}$$

$$u_r^\dagger(p)u_s(p) = 2E_p\delta_{rs} \qquad v_r^\dagger(p)v_s(p) = 2E_p\delta_{rs} \tag{22}$$

$$\overline{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs} \qquad \overline{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs} \tag{23}$$

$$\overline{v}_r(p)u_s(p) = \overline{u}_r(p)v_s(p) = 0 \qquad v_r^\dagger(\vec{p})u_s(-\vec{p}) = u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p}) = 0 \tag{24}$$

Aufgabe 3: Eigenschaften von Majorana-Fermionen **(7 Punkte)**

Vorbemerkungen Anders als in den in der Vorlesung benutzten Konventionen kann man die Lösung der Dirac-Gleichung im Impulsraum auch schreiben als

$$u(p,s) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi(s) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$v(p,s) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^c(s) \\ \chi^c(s) \end{pmatrix} \tag{26}$$

mit

$$\chi(1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi(-1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\chi^c(1/2) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi^c(-1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Beachten Sie, dass aus Zweckmäßigkeit in dieser Konvention im v-Spinor die Spin-Wellenfunktion durch $\chi^c(s)$ gegeben ist. Wir benutzen hier die Dirac-Matrizen in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Der Ladungskonjugations-Operator ist in dieser Konvention gegeben als $C = i\gamma_2\gamma_0$ und ein ladungskonjugierter Spinor somit als

$$\psi^c(x) = \mathscr{C}\psi\mathscr{C}^\dagger = C\bar{\psi}^T = C\gamma_0^T\psi^* = i\gamma_2\gamma_0\gamma_0\psi^*(x) = i\gamma_2\psi^*(x) \tag{30}$$

Aufgaben

(a) Zeigen Sie, dass in dieser Konvention die Ladungskonjugation lediglich u und v-Spinoren vertauscht, d.h.

$$u^c(p,s) = i\gamma_2 u^*(p,s) = v(p,s) \tag{31}$$
$$v^c(p,s) = i\gamma_2 v^*(p,s) = u(p,s) \tag{32}$$

(b) Wir können den Dirac-Feldoperator schreiben als

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(a(p,s) u(p,s) e^{-ip\cdot x} + b^\dagger(p,s) v(p,s) e^{ip\cdot x} \right) \tag{33}$$

wobei E_p fixiert ist zu $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Zeigen Sie, dass ein Majorana-Feld ψ_M mit

$$\psi_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi + \psi^c \right) \tag{34}$$

zerlegt werden kann als

$$\psi_M(x) = \sum_s \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(a_M(p,s) u(p,s) e^{-ip\cdot x} + a_M^\dagger(p,s) v(p,s) e^{ip\cdot x} \right) \tag{35}$$

mit

$$a_M(p,s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(a(p,s) + b(p,s) \big) . \tag{36}$$

(c) Berechnen Sie den Antikommutator

$$\left\{ a_M(p,s), a_M^\dagger(p',s') \right\} \tag{37}$$

und interpretieren Sie das Resultat.

Die Verknüpfung (36) zwischen Teilchen und Antiteilchen, die zur Kommutationsrelation (37) führt, ist nur für ungeladene Fermionen möglich. Für diese sind dann auch Massenterme möglich, die jeweils die reinen Linkskomponenten/Rechtskomponenten von ladungskonjugierten Feldern miteinander verbinden (ohne links und rechts zu mischen), im Gegensatz zu Dirac-Fermionen, bei denen ein Massenterm Links- und Rechtskomponente desselben Feldes mischt.