3. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 07. November 2016 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Darstellungsunabhängige Dirac-Algebra **(8 Punkte)**

Die Dirac-Gleichung ist die relativistische Bewegungsgleichung für Fermionen und ist gegeben als

$$(\not{p} - m)\psi(p) = 0\,, \tag{1}$$

wobei $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$. Die γ-Matrizen genügen der Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}\,. \tag{2}$$

Die folgenden Tensoren bilden eine vollständige Basis derjenigen Matrizen, die aus Produkten von γ-Matrizen gebildet werden können:

$$\begin{array}{ll}
\text{Tensor} & \text{Freiheitsgrade} \\
\mathbb{1} & 1 \\
\gamma_\mu & 4 \\
\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]} = -i\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma}\gamma^5 & 6 \\
\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]} = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\sigma\gamma^5 & 4 \\
\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_{\sigma]} = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5 & 1
\end{array} \tag{3}$$

mit $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ und $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Hierbei ist das antisymmetrische Produkt definiert als

$$A_{[a_1,\ldots,a_n]} \equiv \frac{1}{n!}\left(\sum_{\text{ger. perm. in } a_i} A_{a_1,\ldots,a_n} - \sum_{\text{unger. perm. in } a_i} A_{a_1,\ldots,a_n}\right)\,. \tag{4}$$

Die Basis-Eigenschaft der Tensoren aus (3) drückt sich darin aus, dass jedes Produkt M von γ-Matrizen darstellbar ist als Linearkombination dieser 16 Tensoren

$$M = \sum_a M^a \Gamma_a\,, \tag{5}$$

wobei $\Gamma_a = \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]}, \gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]}, \gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_{\sigma]}\}$ die Basistensoren und M^a die Entwicklungskoeffizienten sind. Die Nützlichkeit dieser Basiswahl besteht darin, dass sich jeder Tensor n-ter Stufe in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen lässt und diese Basis eine solche Zerlegung erleichtert.

Es gelten die Relationen

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0\,, \quad \mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}\,, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0\,. \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \tag{7}$$

b) Benutzen Sie (6) und (7) und zeigen damit

$$\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\gamma_{\rho]} = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\gamma^\alpha\gamma^5. \tag{8}$$

c) Eine alternative Basiswahl sind die Matrizen $\Gamma_a = \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, i\gamma_\mu\gamma^5, \gamma^5\}$. Ebenso wie die Basis (3) sind sie sogar eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$< \Gamma_a, \Gamma_b > \equiv \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\Gamma_a \Gamma^b]\,. \tag{9}$$

Beweisen Sie, dass die genannte Basis tatsächlich orthonormal ist, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$< \Gamma_a, \Gamma_b > = \delta_{ab}\,. \tag{10}$$

Hinweis:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4! \tag{11}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu_\nu \tag{12}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho) \tag{13}$$

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1 \tag{14}$$

Im Allgemeinen gilt im n dimensionalen Minkowskiraum:

$$\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n}\varepsilon_{\nu_1\ldots\nu_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n} = -m!(n-m)!\delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\ldots\delta^{\mu_m]}_{\nu_m} \tag{15}$$

Aufgabe 2: Lorentztransformationen für Spinoren **(6 Punkte)**

Links- und rechtshändige Weyl-Spinoren ϕ_L und ϕ_R sind je zweikomponentige Objekte, die über ihr Verhalten unter Lorentztransformationen definiert sind. Unter den eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen $\Lambda \in L_+^\uparrow$ transformieren sie wie folgt:

$$\phi_{L/R}(x) \to S_{L/R}(\Lambda)\phi_{L/R}(\Lambda^{-1}x)\,. \tag{16}$$

Die Transformationen $S_{L/R}(\Lambda)$ hängen von den Rotationswinkeln $\vec{\vartheta}$ und den Rapiditäten $\vec{\eta}$ ab, welche die Lorentztransformationen $\Lambda = \Lambda(\vec{\vartheta}, \vec{\eta})$ parametrisieren. Sie lassen sich schreiben als

$$S_{L/R}(\Lambda) = \exp\left[-i\frac{\vec{\vartheta}\cdot\vec{\sigma}}{2} \mp \frac{\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right]\,. \tag{17}$$

Hierbei sind σ^i die Pauli-Matrizen und erfüllen die Antikommutatorrelationen $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$.

Zusatzinfo/Kontext:
Dirac-Spinoren ψ sind 4-komponentige Objekte, die sich aus jeweils einem rechts- und einem linkshändigen Weyl-Spinor zusammensetzen:

$$\psi = \begin{pmatrix}\phi_L \\ \phi_R\end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

Die Dirac-Gleichung legt die Abhängigkeit der linkshändigen Komponenten von den rechtshändigen Komponenten eines Teilchens fest. Aus Dirac-Spinoren lassen sich durch die Anwendung der Projektionsoperatoren

$$P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5) \tag{19}$$

links- bzw. rechtshändige Zustände gewinnen.

a) Zeigen Sie, dass für beliebige $\vec{\vartheta}$ und $\vec{\eta}$ gilt

$$\det S_{L/R}(\Lambda) = 1\,. \tag{20}$$

b) Berechnen Sie $S_{L/R}(\Lambda)$ für den Spezialfall von Rotationen um die z-Achse, also für $\vec{\vartheta} = \vartheta_z \vec{e}_z$ und $\vec{\eta} = 0$.
Was ergibt sich für $S_{L/R}(\Lambda)$ in den Fällen $\vartheta_z = 2\pi$ und $\vartheta_z = 4\pi$? Was fällt Ihnen beim Vergleich Ihres Ergebnisses mit entsprechenden Rotationen eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ auf?

c) Zeigen Sie, dass für reine Lorentzboosts, d.h. $\vec{\vartheta} = 0$, die Gleichung

$$S_{L/R}(\Lambda) = \exp\left(\mp\frac{\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right) = \mathbb{1}\cosh\left(\frac{|\vec{\eta}|}{2}\right) \mp \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|}\sinh\left(\frac{|\vec{\eta}|}{2}\right) \tag{21}$$

erfüllt ist.
Berechnen Sie anschließend $S_{L/R}(\Lambda)$ für einen Lorentzboost vom Ruhesystem in ein Bezugssystem mit Impuls $\vec{p}$.

Aufgabe 3: Dirac Spinoren **(6 Punkte)**

Lösungen der Dirac-Gleichung seien definiert als $\Psi_j^+(p) = u_j(p)\exp[-ipx]$ und $\Psi_j^-(p) = v_j(p)\exp[ipx]$ mit $j \in \{1,2\}$ und den Dirac Spinoren in

$$u_j(p) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2(E+m)}}\begin{pmatrix}\xi_j\\ \xi_j\end{pmatrix}, \quad v_j(p) = \frac{-\not{p}+m}{\sqrt{2(E+m)}}\begin{pmatrix}\xi_j\\ -\xi_j\end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Zeigen Sie, für einen Impuls p mit $p^2 = m^2$ und $p^0 = E > 0$ folgende Relationen:

a) $\bar{u}_i(p)u_j(p) = 2m\delta_{ij}$, $\quad \bar{v}_i(p)v_j(p) = -2m\delta_{ij}$ (Normierung)

b) $\bar{u}_i(p)v_j(p) = \bar{v}_i(p)u_j(p) = 0$ (Orthogonalität)

c) $\sum_i u_i(p)\bar{u}_i(p) = \not{p}+m$, $\quad \sum_i v_i(p)\bar{v}_i(p) = \not{p}-m$ (Vollständigkeit)

mit $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$, $\not{p} = p^\mu\gamma_\mu$ und

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_i^2 = 1\,. \tag{24}$$