2. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2016/2017**
Einführung in die Elementarteilchentheorie **Prof. G. Hiller**
Abgabe: bis Montag, den 31. Oktober 2016 17:00 Uhr

Aufgabe 1: Optisches Theorem und Partialwellenzerlegung **(5 Punkte)**
Überprüfen Sie das Optische Theorem im Spezialfall der Streuung zweier spinloser Teilchen, die über ein Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ miteinander wechselwirken. Der Streuquerschnitt lässt sich folgendermaßen in Partialamplituden zerlegen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta)|^2, \tag{1}$$

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2i}\right)P_l(\cos\theta). \tag{2}$$

Hierbei sind:

- k der Betrag des Impulses eines der Teilchen im Schwerpunktsystem der Kollision
- θ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem
- $P_l(\cos\theta)$ das l-te Legendrepolynom (aufgrund der azimutalen Symmetrie trägt von den L_z Eigenwerten m nur $m = 0$ bei)
- $\delta_l = \delta_l(k)$ die Streuphase

Das Optische Theorem lautet:

$$\sigma_{tot}(k) = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f(k,\theta=0). \tag{3}$$

Aufgabe 2: Lorentzinvarianz-Verletzung **(6 Punkte)**
In dieser Aufgabe sollen entgegen der üblichen Annahme Lorentzinvarianz verletzende Beiträge untersucht werden. Mögliche Ursache könnten Effekte einer bisher unbekannten Quantengravitationstheorie sein, zum Beispiel auf Grund einer diskreten Raumzeitstruktur, wie sie in manchen Modellen bei der Planck-Skala $M = 10^{19}$ GeV angenommen wird. Eine Verletzung der Lorentzinvarianz könnte zu modifizierten Dispersionsrelationen führen. Für das Photon könnte so eine Relation in niedrigster Ordnung etwa folgende Form annehmen:

$$E_\gamma^2 = k^2 + \epsilon k^2 + \frac{\xi}{M}k^3, \tag{4}$$

Hierbei ist k der Betrag des Dreierimpulses des Photons, E_γ ist die Energie des Photons, und ϵ, ξ sind dimensionslose Parameter.

(a) Wie lauten die herkömmlichen Dispersionsrelationen für Photonen bzw. Elektronen und Positronen im Vakuum? Zeigen Sie, dass die veränderte Relation (4) die Lorentzinvarianz verletzt.

(b) Wie groß ist die Gruppengeschwindigkeit für Photonen mit der Dispersionsrelation (4)? Rechnen Sie in erster Ordnung in k/M.

(c) Betrachten Sie den Einteilchenzerfall eines Photons in ein Positron-Elektron-Paar, $\gamma \to e^+ e^-$.
Untersuchen Sie den Fall $\epsilon > 0, \xi < 0$. Leiten Sie mit der Annahme $|\vec{p}_+| = |\vec{p}_-|$ aus der Energieerhaltung die Beziehung

$$\epsilon k^2 + \frac{\xi}{M} k^3 \geq 4m^2, \tag{5}$$

ab. Dabei beschreibt m die Masse des Elektrons.

(d) Wie groß muss im Fall ξ = -1 der Parameter ϵ sein, damit der Zerfall möglich ist?

(e) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen (wenn der Zerfall möglich ist) nicht nur eine untere, sondern auch eine obere Schranke an den Impuls k existiert, so dass der Zerfall nur in einem beschränkten Impulsbereich möglich ist.

Aufgabe 3: Phasenraum Dreikörperzerfall **(9 Punkte)**

(a) Vereinfachen Sie das Phasenraumintegral eines Matrixelements $\mathcal{M} = \langle f|T|i\rangle$ für den Dreikörperzerfall $a \to 1+2+3$.

$$R_3(|\mathcal{M}|^2) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int\int\int \frac{d^3p_1}{2E_{p_1}} \frac{d^3p_2}{2E_{p_2}} \frac{d^3p_3}{2E_{p_3}} \delta^4(p_a^\mu - p_1^\mu - p_2^\mu - p_3^\mu)|\mathcal{M}|^2. \tag{6}$$

Anleitung:

- Machen Sie sich zuerst klar, dass

$$\int \frac{d^3p}{2E_p} = \int d^4p\, \delta\left((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\right)\theta(p^0), \tag{7}$$

da allgemein für eine Funktion f mit endlich vielen einfachen Nullstellen x_{0i} gilt:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_{0i})|}\delta(x - x_{0i}). \tag{8}$$

- Nutzen Sie die obige Gleichung anschließend, um die d^3p_3-Integration durchzuführen. Wählen Sie dann das Ruhesystem von Teilchen a als Bezugssystem.
- Vereinfachen Sie die δ-Funktion. Das Endergebnis sollte die Form haben:

$$R_3(|\mathcal{M}|^2) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int\int \frac{d^3p_1^*}{2E_{p_1}^*} \frac{d^3p_2^*}{2E_{p_2}^*} \theta(\mathfrak{p}^0)\delta(\mathfrak{p}^\mu \mathfrak{p}_\mu - m_3^2)|\mathcal{M}|^2. \tag{9}$$

Dabei ist $\mathfrak{p}^\mu = p_a^\mu - p_1^\mu - p_2^\mu$. Größen im Ruhesystem von a sind durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

(b) Betrachten Sie nun im Speziellen den Zerfall $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$. Die Massen der Zerfallsprodukte können in dieser Rechnung als klein betrachtet werden.
Zerlegen Sie die Differentiale mittels $\frac{d^3p}{E_p} = E_p dE_p d\Omega$ und führen Sie die Raumwinkelintegrationen durch, indem Sie sich die relative Lage der $\vec{p}_i^*$ zueinander vergegenwärtigen.